1 Polinomi

1.1 Teorijski deo

Definicija 1. Izraz $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ naziva se *algebarski polinom* stepena n. Brojevi a_k, $k = \overline{0,n}$ nazivaju se *koeficijentima* polinoma P.

Teorema 1.1 (Bezuov stav). *Ostatak pri deljenju polinoma $P(x)$ polinomom $x - a$ je $P(a)$.*

Definicija 2. Broj a je *nula* (ili *koren*) polinoma $P(x)$ ako i samo ako je $P(a) = 0$, odnosno $x - a \mid P(x)$.

♠ HORNEROVA ŠEMA

Definicija 3. Kažemo da je $a \in \mathbb{C}$ *nula polinoma* $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ *višestrukosti* k ako $(x-a)^k$ deli $P(x)$ i $(x-a)^{k+1}$ ne deli $P(x)$.

Teorema 1.2. *Polinom stepena n ima tačno n nula, računajući i njihove višestrukosti.*

♠ Faktorisati polinom u skupu kompleksnih brojeva znači predstaviti ga u obliku

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

gde su $x_1, x_2, ..., x_n$ sve njegove kompleksne nule.

♠ Faktorisati polinom u skupu realnih brojeva znači predstaviti ga u obliku

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_k)Q_1(x)Q_2(x)\ldots Q_l(x)$$

gde su $x_1, x_2, ..., x_k$ sve realne nule polinoma $P(x)$, dok su polinomi $Q_1, Q_2, ..., Q_l$ polinomi drugog stepena koji imaju samo kompleksne nule.

♠ **Vijetove formule** Neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ nule polinoma $P(x)$. Tada važi:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ &\ldots \\ x_1x_2\ldots x_n &= (-1)^n\frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

Teorema 1.3. *Ako je x_k kompleksna nula polinoma* ***sa realnim koeficijentima****, tada je i $\overline{x_k}$ kompleksna nula istog polinoma.*

Teorema 1.4. *Neka je $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ polinom sa celobrojnim koeficijentima, takav da $a_n, a_0 \neq 0$. Ako je $\frac{p}{q}$ nula polinoma $P(x)$, tada $p \mid a_0$ i $q \mid a_n$.*

1.2 Zadaci

1. Korišćenjem Hornerove šeme odrediti količnik i ostatak pri deljenju polinoma
   a) $P(x) = x^5 - 5x^4 - x + 5$ sa $Q(x) = x + 1$;
   b) $P(x) = 4x^3 + x^2$ sa $Q(x) = x + 1 + i$.
2. Korišćenjem Hornerove šeme dokazati da je 2 nula, a 3 dvostruka nula polinoma $P(x) = x^5 - 8x^4 + 22x^3 - 26x^2 + 21x - 18$. Izvršiti faktorizaciju tog polinoma.

3. Odrediti realan koeficijent a tako je $x_0 = -1$ nula polinoma $P(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$ višestrukosti dva.

4. Odrediti realne koeficijente a i b tako da $(x-1)^2$ deli polinom $P(x) = ax^4 + bx^3 + 1$.

5. Odrediti koeficijente a, b i c u polinomu $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tako da taj polinom bude deljiv binomima $x - 1$ i $x + 2$, a podeljen sa $x - 4$ daje ostatak 18.

6. Naći sve nule sledećih polinoma i faktorisati ih:

   a) $P(x) = 3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2$;

   b) $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$;

   c) $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 3x^2 + 4x - 2$ ako je poznato da je jedna nula $1 + i$.

   d) $P(x) = x^6 - 3x^5 + x^4 + ax^3 - 18x^2 + 14x - 4$, ako je poznato da je jedna njegova nula $1 - i$ i da ima jednu trostruku nulu.

7. Koristeći Hornerovu šemu, napisati polinom $P(x) = x^5 + x^3 + 2x^2 - 12x + 8$ po stepenima od $x + 1$.

8. a) Polinom $P(x)$ daje pri deljenju sa $x - 3$ i $x - 5$ redom ostatke 4 i 15. Odrediti ostatak pri deljenju sa $x^2 + 2x - 15$.

   b) Odrediti ostatak pri deljenju polinoma $P(x) = x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + 1$, pri deljenju sa polinomom $x^2 - 1$.

9. Znajući da je zbir dva korena jednačine $2x^3 - x^2 - 7x + a = 0$ jednak 1, odrediti parametar a.

10. Odrediti p tako da jedan koren jednačine $x^3 - 7x + p = 0$ bude jednak dvostrukom drugom korenu te jednačine.

11. Razložiti na zbir prostih racionalnih funkcija sledeće prave racionalne funkcije:

$$a)\ \frac{x^2+2}{x^4+3x^2}; \qquad b)\ \frac{x^2}{x^4-1}; \qquad c)\ \frac{x}{(x^2-1)^2}.$$